Geometria I - PRIMO TEST

10 aprile 2012

Esercizio 1. Siano

$$U = \{(2, 0, \alpha + 2) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad W = \{(\beta, \beta, 2\beta) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \beta \in \mathbb{R}\}$$

due sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

(a) Stabilire, motivandolo, se U e W sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$; in ogni caso determinare una base per la chiusura di ciascuno di essi. [Solo W è sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Base per la chiusura di U: $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$; base per la chiusura di W: $\{(1, 1, 2)\}$] $\boxed{4}$

(b) Determinare un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ per il quale

$$\ker f = < W > \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\, f = < U >,$$

scrivendo la matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica.

[$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$] $\boxed{4}$

(c) Determinare un complemento diretto per $< W >$ in $\mathbb{R}^3$.
[Ad es. $< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$] $\boxed{2}$

Esercizio 2. Studiare la diagonalizzabilità della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

al variare di k, parametro reale. [Diagonalizzabile se $k \neq 1$. In tal caso gli autovalori sono: 1, con molt. a. e g. pari a 2 e k con molt. a. e g. pari a 1] $\boxed{3}$
Posto $k = 0$, diagonalizzarla, determinando anche una matrice diagonalizzante. [$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$] $\boxed{3}$

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_4[x]$ dei polinomi a coefficienti reali e di grado al massimo 4, sia V l'insieme dei polinomi che si annullano in 0 e in 1.

(a) Dire se V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_4[x]$; in tal caso determinarne la dimensione e una base. [Sì. Base: $\{x^2 - x, x^3 - x, x^4 - x\}$] $\boxed{3}$

(b) Dire se

$$A = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \ : \ p(0) = p(1) = 0 \wedge p(2) = 1\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_4[x]$ e determinare una base per la sua chiusura.
[Non è sottospazio. Base per la chiusura: $\{x^2 - x, x^3 - x, x^4 - x\}$] $\boxed{4}$

Esercizio 4. Al variare del parametro reale α, discutere e risolvere il sistema $\boxed{5}$

$$\begin{cases} \alpha x + \alpha y - \alpha t = 0 \\ 2(1-\alpha)x + (\alpha - 1)t = 0 \\ (2-\alpha)x + y + \alpha z = 0 \end{cases} .$$

[Il sistema è sempre compatibile. Ammette ∞^2 soluzioni per $\alpha = 0$ e per $\alpha = 1$; negli altri casi ha ∞^1 soluzioni. Le soluzioni sono: per $\alpha = 0$, il sottospazio generato da $\{(1,-2,0,2),(0,0,1,0)\}$; per $\alpha = 1$, il sottospazio generato da $\{(1,0,-1,1),(0,1,-1,1)\}$; per $\alpha \neq 0,1$: $\{\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, \frac{\alpha-3}{2\alpha}t, t\right) \in \mathbb{R}^4 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$]

Esercizio 5. Siano $V = V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Sia $\vec{v}$, diverso dal vettor nullo, un autovettore di T con autovalore relativo $\lambda \neq 0$.

(a) Dimostrare che $\vec{v}$ appartiene a $\operatorname{Im} T$. $\boxed{1}$

(b) Dimostrare che se T è diagonalizzabile, allora $V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$ $\boxed{2}$

(c) Fornire un controesempio per provare che non vale il viceversa. $\boxed{1}$